۱ ) مشتق تابع $y=(x^{۲}-۱)(x^{۲}-۲)....(x^{۲}-۱۰)$ را به ازای $x=۳$ بدست آورید .

چون قبل از $x^{۲}-۱۰$ پرانتز $x^{۲}-۹$ در ضابطه وجود دارد که به ازای $x=۳$ صفر می شود از تعریف مشتق استفاده می کنیم :

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^{۲}-۱)(x^{۲}-۲)....(x^{۲}-۹)(x^{۲}-۱۰)}{(x-۳)}=$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{(x^{۲}-۱)(x^{۲}-۲)...(x+۳)(x^{۲}-۱۰)}{۱}=(۹-۱)(۹-۲)(۹-۳)....(۹-۸)(۳+۳)(۹-۱۰)=$$

$$۸\times ۷\times ۶\times ....۶\times (-۱)=-۶\times ۸!$$

۲ ) فرض کنید توپی از طبقه بالای برج میلاد به معادله $S(t)=۴/۹t^{۲}$ پرتاب می شود ( $t$ بر حسب ثانیه است . ) سرعت متوسط این توپ را در ثانیه ی ۵ تا ۵/۱ به دست آورید .

$$\text{سرعت متوسط}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(۵/۱)-s(۵)}{۵/۱-۵}=\frac{۴/۹(۵/۱)^{۲}-۴/۹(۵)^{۲}}{۰/۱}=۴۹/۴۹$$

۳ ) با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق تابع $f(x)=x^{۳}+۲x$ را محاسبه کنید .

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(x+\Delta x)^{۳}+۲(x+\Delta x)-x^{۳}-۲x}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۳x(\Delta x)^{۲}+۳x^{۲}\Delta x+(\Delta x)^{۳}+۲\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}(۳x\Delta x+۳x^{۲}+(\Delta x)^{۲}+۲)=۳x^{۲}+۲$$

۴ ) مشتق کسر $\frac{x^{۲}(|\sin x|+۳\cos(\frac{\pi}{۲}+x))}{۲\sin x}$ در نقطه ی $x=-\frac{\pi}{۲}$ را بدست آورید ؟

$$x=-\frac{\pi}{۲}\to |\sin x|=-\sin x$$

$$y=\frac{x^{۲}(-\sin x-۳\sin x)}{۲\sin x}=\frac{x^{۲}(-۴\sin x)}{۲\sin x}=-۲x^{۲}$$

$$\Rightarrow y'=-4x\Rightarrow y'(-\frac{\pi}{2})=۲\pi$$

۵ ) اگر تابع $f(x) = x\tan x$ ، $\underset{x\to\frac{\pi}{۴}}{Lim}\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{۴})}{x-\frac{\pi}{۴}}$ را بدست آورید ؟

با توجه به تعریف مشتق ،

$$f'(x) = \tan x + x(۱+\tan^۲ x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴}) = ۱+\frac{\pi}{۴}(۱+۱) = ۱+\frac{\pi}{۲}$$

۶ ) اگر $f(x^۲ - g(x)) = g(۳x)$ باشد و $g(۰) = ۲g'(۰) = ۱$ مقدار $f'(-۱)$ را بیابید

$$(۲x - g'(x))f'(x^۲ - g(x)) = ۳g'(۳x)$$

$$x = ۰ \Rightarrow (۰ - g'(۰))f'(۰ - g(۰)) = ۳g'(۰) \Rightarrow (-\frac{۱}{۲})f'(-۱) = ۳\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow f'(-۱) = -۳$$

۷ ) تابع با ضابطه ی $f(x) = x^۳ + ۳x$ مفروض است . معادله خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطه ای به طول ۴ واقع بر $f^{-۱}$ را بنویسید .

$$b = ۴\ ,\ f(a) = b \to a^۳ + ۳a = ۴ \to a = ۱$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۳ \to (f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{f'(a)} = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۶} \to m = \frac{۱}{۶}$$

معادله خط مماس بر $f^{-۱}$ $\quad y - ۱ = \frac{۱}{۶}(x-۴) \to ۶y - ۶ = x - ۴ \to ۶y - x - ۲ = ۰$

۸ ) تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + x$ همواره صعودی است حدود متغییر $a$ را به دست آورید .

همواره صعودی $\Rightarrow f'(x) > ۰ \to ۳x^۲ + ۲ax + ۱ > ۰ \to$

$$\Delta < ۰ \to ۴a^۲ - ۱۲ < ۰ \to a^۲ < ۳ \to -\sqrt{۳} < a < \sqrt{۳}$$

۹ ) اگر معادله خط مماس برای منحنی $y = ax^۲ + bx + ۳$ در نقطه $(-۱,۱)$ واقع بر منحنی با خط $y = ۳x + ۱۰$ موازی باشد آنگاه $۳b - a$ را به دست آورید .

$$\begin{cases} ۱ = a - b + ۳ \to a - b = -۲ \\ y' = ۲ax + b \xrightarrow{x=-۱,m=۳} ۳ = -۲a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -۲ \\ -۲a + b = ۳ \end{cases} \to a = -۱ \quad , \quad b = ۱$$

$$\to ۳b - a = ۳ + ۱ = ۴$$

**۱۰ ) مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$ را در نقطه $x_0 = 0$ بررسی کنید .**

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}=\begin{cases} f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x}=\sqrt{1}=1 \\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x\sqrt{x+1}}{x}=-\sqrt{1}=-1\end{cases}$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$ بنابراین مشتق در $x=0$ **وجود ندارد .**

**۱۱ ) اگر $f(x)=\sqrt{2x-1}$ مشتق تابع $y=f(\tan 2x)$ را محاسبه کنید**

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\qquad y'=2(1+\tan^2 2x)f'(\tan 2x)=2(1+\tan^2 2x)\frac{1}{\sqrt{2\tan 2x-1}}$$

۱۲ ) اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2$ ، آنگاه مشتق $g(x)=f(x^4+x^2+1)$ در $x=1$ را بیابید .

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2\to f'(3)=-2$$

$$g'(x)=(4x^3+2x)f'(x^4+x^2+1)\xrightarrow{x=1}g'(1)=(4+2)f'(1+1+1)=6f'(3)=-12$$

۱۳ ) تابع $f(x)=\sin x$ را در بازه $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ در نظر بگیرید مشتق معکوس این تابع را بیابید .

تابع $f(x)=\sin x$ در بازه $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ یک به یک است بنابراین معکوس پذیر می باشد و با توجه به اینکه اگر $g(x)$ معکوس تابع $f(x)$ باشد و $f$ مشتق پذیر باشد و مشتقش مخالف صفر باشد آنگاه داریم :

$$f'(x)=\cos x\to g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

۱۴ ) از نقطه ی $A(1,5)$ دو مماس بر منحنی $y=x-x^2$ رسم شده . مجموع عرضهای نقاط تماس چقدر است ؟

$y'=1-2x$

نقطه تماس $M(a,a-a^2)$

شیب خط مماس $m=1-2a$

$$y-5=(1-2a)(x-1)\xrightarrow{M}a-a^2-5=(1-2a)(a-1)\to a-a^2-5=-1-2a^2+3a\to$$

$$a^2-2a-4=0\to a=1\pm\sqrt{5}$$

$$\left.\begin{aligned} a=1-\sqrt{5}\to a-a^2=1-\sqrt{5}-1+2\sqrt{5}-5=\sqrt{5}-5 \\ a=1+\sqrt{5}\to a-a^2=1+\sqrt{5}-1-2\sqrt{5}-5=-\sqrt{5}-5\end{aligned}\right\}\to$$

مجموع عرضها $=-10$

۱۵ ) به ازای چه مقدار $m$ نمودار تابع $y=(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)$ مماس بر محور $x$ها است ؟

$$y=-x^۲+(۳m+\frac{۱}{m})x-۳$$

$\Delta=۰$ شرط مماس بودن بر محور $x$ها

$$\Delta=(۳m+\frac{۱}{m})^۲-۱۲=۰\to(۳m+\frac{۱}{m})^۲=۱۲\to ۳m+\frac{۱}{m}=\pm۲\sqrt{۳}\xrightarrow{m\neq۰}$$

$$۳m^۲+۱\pm۲\sqrt{۳}m=۰\to\Delta=۱۲-۱۲=۰\to m=\frac{\pm۲\sqrt{۳}}{۶}=\frac{\pm\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۶ ) مشتق توابع زیر را به دست آورید . ( ساده کردن لازم نیست .)

الف ) $y=\tan^{-۱}(\sin x)\to y'=\cos x(\frac{۱}{۱+\sin^۲ x})=\frac{\cos x}{۲-\cos^۲ x}$

ب ) $y=\frac{\sqrt[۳]{x}(۲x-۱)^۵}{x^۳-۴x}$

$$y'=\frac{\left[\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(۲x-۱)^۵+۵\times۲(۲x-۱)^۴\times\sqrt[۳]{x}\right](x^۳-۴x)-(۳x^۲-۴)(\sqrt[۳]{x}(۲x-۱)^۵)}{(x^۳-۴x)^۲}$$

۱۷ ) آهنگ تغییرات مساحت یک دایره را نسبت به محیط آن بدست آورید .

$$P=۲\pi r\to r=\frac{P}{۲\pi}$$

$$S=\pi r^۲\to S(P)=\pi(\frac{P}{۲\pi})^۲=\frac{P^۲}{۴\pi}\to S'(P)=\frac{۱}{۴\pi}\times۲P=\frac{P}{۲\pi}$$

۱۸ ) اگر $f(x^۲+x)=x+۵g(۵x-۵)$ ، $f'(۲)=۱$ باشد مطلوبست محاسبه ی $g'(۰)$ .

$$(x^۲+x)'f'(x^۲+x)=۱+۵(۵x-۵)'g'(۵x-۵)\to$$

$$(۲x+۱)f'(x^۲+x)=۱+۵\times۵g'(۵x-۵)$$

$$۵x-۵)=۰\to x=۱\to۳f'(۲)=۱+۲۵g'(۰)\to۳(۱)=۱+۲۵g'(۰)\to g'(۰)=\frac{۲}{۲۵}$$

۱۹ ) مشتق تابع زیر را به دست آورید .

$$y=\frac{۱+\sin ۲x}{\sin x+\cos x}$$

$$y'=\frac{۲\cos ۲x(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)(۱+\sin ۲x)}{(\sin x+\cos x)^۲}=$$

$$\frac{۲(\cos^۲ x-\sin^۲ x)(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^۲}{(\sin x+\cos x)^۲}=$$

$$\frac{۲(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^۲-(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^۲}{(\sin x+\cos x)^۲}=$$

$$۲\cos x-۲\sin x-\cos x+\sin x=\cos x-\sin x$$

۲۰ ) اگر $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}}$ و $g(x)=f(\frac{x-۳}{۲x-۳})$ آن گاه $g'(۲)$ را پیدا کنید .

$$g(x)=f(\frac{x-۳}{۲x-۳})\to g'(x)=\frac{-۳+۶}{(۲x-۳)^۲}f'(\frac{x-۳}{۲x-۳})\to g'(۲)=\frac{۳}{۱^۲}f'(-۱)$$

$$f'(-۱)=\frac{۱}{۲}\to g'(۲)=\frac{۳}{۲}$$

۲۱ ) تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<۱ \\ x^۲+۱ & x\geq ۱\end{cases}$ به ازای چه مقادیر $b,a$ در $x=۱$ مشتق پذیر است ؟

چون تابع $f$ در $x=۱$ مشتق پذیر است در این نقطه پیوسته است . بنابراین :

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)\to ۲=۲=a+b\to a+b=۲ \qquad (۱)$$

از طرفی داریم :

$$f'(x)=\begin{cases} a & x<۱ \\ ۲x & x>۱\end{cases}\to f'_-(۱)=f'_+(۱)\to a=۲\xrightarrow{(۱)} b=۰$$

۲۲ ) تابع $f$ با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} \cos x & x\leq \frac{\pi}{۲} \\ ax-b & x\rangle \frac{\pi}{۲}\end{cases}$ مفروض است.ضرایب $a,b$ را چنان بیابید که این تابع

در $x_۰=\frac{\pi}{۲}$ مشتق پذیر باشد.

پاسخ :

الف ) شرط پیوستگی :

$$f(\frac{\pi}{۲})=\cos\frac{\pi}{۲}=۰ \text{ و } \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\cos x=۰ \text{ و } \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} ax-b=\frac{\pi}{۲}a-b$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۲}a-b=۰$$

ب ) شرط مشتق پذیری:

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x & x<\frac{\pi}{۲}\\ a & x>\frac{\pi}{۲}\end{cases}\rightarrow f'_-(\frac{\pi}{۲})=-\sin\frac{\pi}{۲}=-۱\rightarrow a=-۱$$

$$\frac{\pi}{۲}a-b=۰,(a=-۱)\rightarrow b=-\frac{\pi}{۲}$$

۲۳ ) مشتق توابع روبرو را حساب کنید .

الف ) $y=\sqrt[۳]{x^۲-۵x}+\sin^۴(\frac{x^۲}{x-۲})$

ب ) $f(x)=(۵x+۶)(۳-۷x)^۴$

حل الف )

$$y'=\frac{۲x-۵}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۵x)^۲}}+۴\sin^۳(\frac{x^۲}{x-۲})\cos(\frac{x^۲}{x-۲})(\frac{۲x(x-۲)-x^۲}{(x-۲)^۲})$$

حل ب )

$$f'(x)=۵(۳-۷x)^۴+۴(-۷)(۳-۷x)^۳(۵x+۶)$$

۲۴ ) معادله خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ را در نقطه ی (۱و۳) برای تابع $f(x)=x^۳+x+۱$ بنویسید.

پاسخ:

$$f'(x)=۳x^۲+۱,(f^{-۱})'(b)=\frac{۱}{f'(a)},f(a)=b$$

$$x^۳+x+۱=۳\rightarrow x=۱\Rightarrow a=۱,b=۳\rightarrow (f^{-۱})'(۳)=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۴}$$

$$\rightarrow y-۱=\frac{۱}{۴}(x-۳)\rightarrow y=\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۴}$$ معادله خط مماس

۲۵ ) مشتق چپ تابع با ضا بطه $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ را در نقطه $x=0$ بدست آورید .

$$f'_-(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{x(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}})}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۶ ) اگر $x \geq 1$ و $f(x) - x^3 - 2x$ وخط $10y - x + m$ مماس بر نمودار $f^{-1}$ باشد ، آ نگا ه $m$ چقدر است؟

شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}$ در نقطه ی نظیر $(x, y) \in f$ روی $f^{-1}$ برابر است با $\frac{1}{10}$ و داریم :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow f'(x) = 10$$

$$f'(x) = 10 \Rightarrow 3x^2 - 2 = 10 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 2(2) = 4$$

$$(2,4) \in f \Rightarrow (4,2) \in f^{-1} \Rightarrow 10y = x + m \Rightarrow 10(2) = 4 + m \Rightarrow m = 16$$

۲۷ ) اگر $f'(x) = x^۲ + x$ ,$g(۰) = g'(۰) = ۱$ باشد مقدار مشتق $y = fog(۲x)$ در نقطه $x_۰ = ۰$ را بدست آورید.

$$y' = ۲g'(۲x)\, f'(g(۲x))$$

اکنون مقدار مشتق فوق به ازای $x = ۰$ برابر است با:

$$y' = ۲g'(۰)\, f'(g(۰))$$

و چون $f'(۱) = ۲$ است پس داریم:

$$y' = ۲(۱)\, f'(۱) = ۲(۲) = ۴$$

۲۸ ) از نقطه $A(۰,-۲)$ دو مماس بر منحنی $y = x^۲ + ۲$ رسم کرده ایم. عرض نقطه تماس چقدر است؟

نقطه $(\alpha, \alpha^۲ + ۲)$را روی منحنی در نظر می گیریم چون $y'=2x$ پس: $y - \alpha^۲ - ۲ = ۲\alpha(x - \alpha)$ چون معادله خط مماس از نقطه $(0,2)$ می گذرد پس:

$$-\alpha^۲ - ۴ = -۲\alpha^۲$$

در نتیجه $\alpha = \pm ۲$است و چون عرض نقطه تماس $\alpha^۲ + ۲$می باشد پس مقدار آن ۶ می شود.

۲۹ ) در تابع $f(x) = \begin{cases} ۵x + ۱ & x \geq ۰ \\ ۴x^۲ + ۲x & x < ۰ \end{cases}$ حاصل $f'_{-}(۰)$ کدام است؟

جواب :

$$f'_-(\circ)=\lim_{x\to \circ^-}\frac{۴x^{۲}+۲x-۱}{x}=\frac{-۱}{\circ^-}=+\infty$$

بنابراین تابع $f$ در $x=\circ$ از سمت چپ مشتق پذیر نیست .

۳۰ ) اگر $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ , $g(x)=f(\frac{۱}{x})$ مقدار $g'(\frac{۳}{۴})$ را حساب کنید .

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=-\frac{۱}{x^{۲}}f'(\frac{۱}{x})\to g'(\frac{۳}{۴})=-\frac{۱۶}{۹}f'(\frac{۴}{۳}) \\ f'(\frac{۴}{۳})=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱۶}{۹}}}=\frac{۱}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۵} \end{array}\right\}\to g'(\frac{۳}{۴})=-\frac{۱۶}{۹}\times\frac{۳}{۵}=-\frac{۱۶}{۱۵}$$

۳۱ ) مشتق تابع $f(x)=\frac{\sin^{۳}x-\sin x}{\sin x\cos x}$ در $x=\frac{\pi}{۴}$ را حساب کنید .

$$f(x)=\frac{\sin x(\sin^{۲}x-۱)}{\sin x\cos x}=\frac{-\cos^{۲}x}{\cos x}=-\cos x\to f'(x)=\sin x\to f'(\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

**۳۲ ) مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $A(۱,۱)$ واقع بر آن بیابید .(با استفاده از تعریف)**

$$=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\ f'(۱)=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\quad \lim_{x\to۱}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=۱\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=$$

**۳۳ ) شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=\frac{۲x-۳}{x}$ در نقطه ای به طول ۱ واقع بر آن را بدست آورید .**

$$y=\frac{۲x-۳}{x}\Rightarrow y'=\frac{۲x-۲x+۳}{x^{۲}}=\frac{۳}{x^{۲}}\Rightarrow m=y'(۱)=\frac{۳}{۱}=۳$$

**۳۴ ) مشتق $f(x)=۲Sin(۲x)Cos(۲x)$ را بیابید .**

$$f(x)=۲Sin۲xCos۲x=Sin۴x\Rightarrow f'(x)=۴Cos۴x$$

**۳۵ ) در تابع $f(x)=x^{۳}+x$ حاصل $(f^{-۱})'(۲)$ را بیابید .**

**چون تابع پیوسته و اکیداً صعودی است لذا معکوس پذیر است پس طول ۲ روی $f^{-۱}$ عرض روی تابع اصلی است و تلاقی خط $x=۲$ با منحنی تنها یک ریشه دارد (تابع اکیداً صعودی است) لذا :**

$$x^{۳}+x=۲\Rightarrow x=۱\Rightarrow (\overset{-۱}{f})'(۲)=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۴}$$

۳۶ ) اگر $f(x)=g(x^{۲}+x)$ باشد و $f'(۲)=۵$ باشد آنگاه $g'(۶)$را بدست آورید.

$$f'(x)=g'(x^{۲}+x).(۲x+۱)$$
$$f'(۲)=g'(۶).(۵)\Rightarrow ۵=g'(۶).۵\Rightarrow g'(۶)=۱$$

۳۷ ) خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{x-۳}{۲x+۱}$ در نقطه‌ای بر خط $۲y+۱۴x=۹$ عمود است. مختصات آن نقطه را بیابید.

$$m=-\frac{۱۴}{۲}=-۷\Rightarrow m'=\frac{۱}{۷}$$
$$y'=\frac{۱(۲x+۱)-۲(x-۳)}{(۲x+۱)^{۲}}=\frac{۷}{(۲x+۱)^{۲}}$$
$$\frac{۷}{(۲x+۱)^{۲}}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow ۲x+۱=\pm۷ \qquad x=۳\Rightarrow A\begin{vmatrix}۳\\ ۰\end{vmatrix} \qquad x=-۴\Rightarrow B\begin{vmatrix}-۴\\ ۱\end{vmatrix}$$

۳۸ ) - به ازای کدام مقدار $a$ تابع $f(x)=x|x-۱|+a|x-۱|$ در $x=۱$ مشتق پذیر است؟

$$f(x)=(x+a)|x-۱|=\begin{cases}(x+a)(x-۱) & x\geq ۱\\ -(x+a)(x-۱) & x<۱\end{cases}$$

تابع در $x=۱$ پیوسته است . زیرا

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=۰$$
$$f'(x)=\begin{cases}۲x+a-۱ & x<۱\\ -۲x-a+۱ & x<۱\end{cases}$$
$$f'_{+}(۱)=f'_{-}(۱)\quad\Rightarrow\quad ۲+a-۱=-۲-a+۱\quad\Rightarrow\quad a=-۱$$

۳۹ ) در لحظه ای که شعاع یک حباب کروی صابون $/۵cm$.و آهنگ تغییر حجم حباب $۱/۶cm^{۳}$ باشد، شعاع حباب با چه سرعتی افزایش می یابد؟

$$v=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dt}=۴\pi r^{۲}\frac{dr}{dt}\ \Rightarrow\ ۱/۶=۴\pi\times(۰/۵)^{۲}\frac{dr}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dr}{dt}=\frac{۸}{۵\pi}$$

۴۰ ) در لحظه ای که شعاع یک حباب کروی صابون $/۵cm$.و آهنگ تغییر حجم حباب $۱/۶cm^{۳}$ باشد، شعاع حباب با چه سرعتی افزایش می یابد ؟

$$v=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dt}=۴\pi r^{۲}\frac{dr}{dt}\ \Rightarrow\ ۱/۶=۴\pi\times(۰/۵)^{۲}\frac{dr}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dr}{dt}=\frac{۸}{۵\pi}$$

۴۱ ) حدود $k$ را طوری بیابید که $f(x)=\dfrac{k\cos x}{۱+\cos x}$ در بازه $(۰,\pi)$ نزولی باشد.

$$f(x)=\frac{k\cos x}{۱+\cos x}=\frac{k\cos x+k-k}{۱+\cos x}=k-\frac{k}{۱+\cos x}\qquad f'(x)=-k(\frac{\sin x}{(۱+\cos x)^{۲}})$$

اگر $f$ در بازه $(۰,\pi)$ نزولی باشد، برای $x\in(۰,\pi)$، $f'(x)<۰$ .

$$x\in(۰,\pi) \Rightarrow \sin x>۰ \overset{f'(x)<۰}{\Rightarrow} -k<۰ \Rightarrow k>۰$$

۴۲ ) اگر $h(x)=g(x^۲+x)$ , $h'(۲)=۵$ مطلوب است محاسبه: $g'(۶)$

$$h'(x)=(۲x+۱)g'(x^۲+x) \ \underrightarrow{x=۲}\ h'(۲)=۵g'(۶)\Rightarrow ۵=۵g'(۶)\rightarrow g'(۶)=۱$$

۴۳ ) مشتق پذیری تابع $f$ را در نقطه $x_۰=-۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=(x+۱)[x]$$
$$f(-۱)=(-۱+۱)[-۱]=۰$$
$$f'_+ \lim_{x\to -۱^+}\frac{(x+۱)[x]-۰}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^+}\frac{(x+۱)(-۱)-۰}{x+۱}=-۱$$
$$f'_- \lim_{x\to -۱^-}\frac{(x+۱)[x]-۰}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^-}\frac{(x+۱)(-۲)-۰}{x+۱}=-۲$$

تابع را در $x=-۱$ مشتق پذیر نمی باشد .

۴۴ ) مشتق بگیرید .

$$f(x)=\sin\sqrt[۳]{x} \quad , \quad g(x)=\cos\sqrt{۱+x}$$
$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\left(\cos\sqrt[۳]{x}\right) \quad , \quad g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}\left(-\sin\sqrt{۱+x}\right)$$

۴۵ ) اگر $g(x)=x^۲-۱$ , $f'(x)=\sqrt{۳x+۴}$ , $F(x)=fog(x)$ باشد $F'(۱)$ را بدست آورید .

$$f'(x)=\sqrt{۳x+۴} \longrightarrow f'\left(g(x)\right)=\sqrt{۳(x^۲-۱)+۴}=\sqrt{۳x^۲+۱}$$

و با توجه به ضابطه $g$ بدست می آوریم $g'(x)=۲x$ در نتیجه :

$$F'(x)=\left(fog\right)'(x)=g'(x).f'\left(g(x)\right)$$
$$F'(x)=۲x\times\sqrt{۳x^۲+۱} \longrightarrow F'(۱)=۲\times\sqrt{۳(۱)^۲+۱}=۴$$

۴۶ ) تابع $f(x)=\cos 3x+27\cos x$ در کدام قسمت بازه $[0,2\pi]$ اکیداً نزولی است ؟

$$y'=-3\sin 3x-27\sin x\rightarrow \sin 3x+9\sin x>0$$
$$\rightarrow 3\sin x-4\sin^3 x+9\sin x>0\rightarrow -4\sin^3 x+12\sin x>0$$
$$\rightarrow \sin x(-\sin^2 x+3)>0\rightarrow \sin x>0\rightarrow x\in[0,\pi]$$

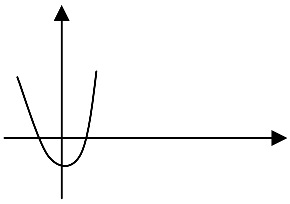
۴۷ ) نقطه $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ را روی نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 1$ اختیار می کنیم. تصاویر نقطه $M$روی محور $x$ها و روی محور $y$ها به ترتیب $B, A$ می نامیم . اگر $S$مساحت مستطیل $OAMB$باشد، $S$را به صورت تابعی از $x$نوشته وآهنگ تغییر $S$نسبت به $x$ و آهنگ لحظه ای تغییر را در $x = ۳$تعیین کنید.

جواب: ابتدا نمودار $y = x^2 - 1$ را رسم کرده سپس نقطه دلخواه $M$ را روی نمودار $y$انتخاب می کنیم.

مساحت مستطیل $S = xy \to S(x) = x(x^2 - 1) = x^3 - x$

$s(x) = x^3 - x \to S(3) = 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$

$$S'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{S(x) - S(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - x - 24}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+8)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} x^2 + 3x + 8$$
$$= 9 + 9 + 8 = 26$$



۴۸ ) اگر $f(x) = x^۲[x]$ باشد مقدار $\lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - ۸}{x - ۲}$ را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ & x > ۲ \\ x^۲ & x < ۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - ۸}{x - ۲} = f'_+(۲) \Rightarrow f'_+(۲) = ۸$$

۴۹ ) اگر $g(x) = (x - \sqrt{x})^{-۲۰}$ و $f(x) = (x + \sqrt{x})^{۲۰}$ باشد

حاصل $B = f(۴)'g(۴) - g(۴)'f(۴)$ را بیابید.

$$B = \frac{f'(۴)g(۴) - g'(۴)f(۴)}{g^۲(۴)} \times g^۲(۴) = (\frac{f}{g})'(۴)g^۲(۴)$$

$$\frac{f}{g} = \frac{(x + \sqrt{x})^{۲۰}}{(x - \sqrt{x})^{-۲۰}} = (x + \sqrt{x})^{۲۰}(x - \sqrt{x})^{۲۰} = (x^۲ - x)^{۲۰}$$

$$(\frac{f}{g})' = ۲۰(۲x - ۱)(x^۲ - x)^{۱۹} \Rightarrow (\frac{f}{g})'(۴) = ۲۰(۷)(۱۶ - ۴)^{۱۹} = ۱۴۰(۱۲)^{۱۹} = \ldots$$

**۵۰ ) معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی تابع $y = \sin^{-۱}(\frac{۱}{x - ۲})$ را در نقطه تلاقی آن با محور عرض ها بدست آورید .**

**حل :**

نقطه تلاقی با محور عرضها $x=\circ \to y=\sin^{-1}(\frac{1}{\circ-2})=\sin^{-1}(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}\to A(\circ,-\frac{\pi}{6})$

معادله خط مماس
$$\begin{cases} y'=\dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{(x-1)^2}}}\to m=\dfrac{\frac{-1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{3}} \\ y+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{-1}{2\sqrt{3}}(x-\circ)\to y=\dfrac{-1}{2\sqrt{3}}x-\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

معادله خط قائم $m'=-\frac{1}{m}=2\sqrt{3}\to y+\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}(x-\circ)\to y=2\sqrt{3}x-\frac{\pi}{6}$

**۵۱ ) آهنگ تغییر مساحت یک مربع به ضلع $x$ را نسبت به تغییر محیط آن تعیین کنید.**

**حل :**

**مساحت مربع** $S=x^2$ **و** **محیط مربع** $P=4x\to x=\frac{P}{4}\to S=(\frac{P}{4})^2$

**آهنگ تغییر مساحت به محیط برابر است با :** $S'(P)=\frac{2P}{16}=\frac{P}{8}$

۵۲ ) شیب خط مماس بر منحنی $x+y\sin x=\frac{\pi}{2}$ را در نقطه ای به عرض صفر واقع بر آن بدست آورید .

$$y=\cdot \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow A=(\frac{\pi}{2},\cdot) \Rightarrow y=\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin x}\Rightarrow .... \Rightarrow y'=-1$$

۵۳ ) مشتق تابع $y=\cos(x^2+\frac{\pi}{3})$ را در نقطه ای به طول $\sqrt{\pi}$به دست آورید.

$$y=\cos(x^2+\frac{\pi}{3})\Rightarrow y'=-2x\sin(x^2+\frac{\pi}{3})$$

$$x=\sqrt{\pi}\Rightarrow y'(\sqrt{\pi})=-2(\sqrt{\pi})\sin((\sqrt{\pi})^2+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3\pi}$$

۵۴ ) مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$ را در $x=\cdot$ بررسی کنید .

$$f'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{|x|\sqrt{x+1}-\circ}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\circ^+}\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to\circ^-}\dfrac{-x\sqrt{x+1}}{x}=-1\end{cases}$$

بنابراین $f'(\circ)$ وجود ندارد .

۵۵ ) به کمک فرمول، مشتق ها را حساب کنید.

الف ) $y=\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ب ) $\sin\sqrt{1+x^2}$

الف ) $$y'=\frac{(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}}{x}=\frac{2\sqrt{x}-1}{x}$$

ب ) $$y'=(\cos\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})'=\cos\sqrt{1+x^2}\times\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\times 2x=\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵۶ ) ثابت کنید اگر تابعی در نقطه ای مشتق پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

پیوستگی یک تابع در یک نقطه یعنی

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\to \lim_{x\to a} f(x)-f(a)=0$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

۵۷ ) توابع $g,f$ هر دو در $x=a$ مشتق پذیرند آیا لزوماً $gof$ در $x=a$ مشتق پذیر است؟

جواب: خیر زیرا بایستی $g$ در $x=f(a)$ مشتق پذیر باشد. مثلاً دو تـابع $f(x)=x-1$ و $g(x)=|x|$ هـر دو در $x=1$ مشـتق پذیرنـد ولـی $(gof)(x)=|x-1|$ در $x=1$ مشـتق پـذیر نیسـت. در ایـن مثـال $f(1)=\circ$ ولی $g$ در صفر مشتق پذیر نیست.

۵۸ ) اگر $h(x)=f(2x^2-3)$ و $h'(1)=5$ باشد حاصل $f'(-1)$ را بیابید.

$$h'(1)=4(1)\ f'(-1)=5\to f'(-1)=\frac{5}{4}\ h'(x)=4x\ \ f'(2x^2-3)\to$$

$$h(x)=f(2x^2-3)\to$$

۵۹ ) تابعی بنویسید که در یک نقطه معین مشتق پذیر نباشد ولی در آن نقطه خط مماس بر منحنی تابع وجود داشته باشد.

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}\ \to\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

خط $x=1$ بر منحنی مماس است ولی $f'(1)$ وجود ندارد .

۶۰ ) در تابع $y=\frac{x^{3}}{3}+x^{2}+ax+1$ مقدارهای $a$ را چنان بیابید که تابع روی $R$ اکیدا صعودی باشد ؟

$y'=x^{2}+2x+a\geq 0$

$\Delta\leq 0 \quad , \quad a>0 \quad , \quad 4-4a\leq 0\Rightarrow a\geq 1$

۶۱ ) اگر $f(x)=\sqrt{3x-1}$ مشتق تابع $y=f(\tan 3x)$ را محاسبه کنید ؟

$$y'=3(1+\tan^{2}3x)\,f'(\tan 3x)\xrightarrow{f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}}y'=3(1+\tan^{2}3x)\left(\frac{3}{2\sqrt{3\tan 3x-1}}\right)$$

۶۲ ) اگر $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^{2}+4}}$ و $g(x)=f\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)$ باشد.

الف) $g'(x)$ را محاسبه کنید.

ب) $g'(2)$ را به دست آورید.

جواب)

الف ) $g'(x)=\frac{4}{(3x-2)^{2}}\,f'\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)\rightarrow\frac{4}{(3x-2)^{2}}\times\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)^{2}+4}}$

ب ) $g'(2)=\frac{4}{16}\times\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

۶۳ ) معادله خطوط مماس و قائم بر منحنی $y=2x^{3}-3x+4$ را از نقطه برخورد نمودار با محور $y$ ها بدست آورید .

$x=0\Rightarrow y=4 \qquad (0,4)$

$y'=6x^{2}-3\rightarrow m=-3\rightarrow m'=\frac{1}{3}$

معادله مماس $\qquad y-4=-3x\rightarrow y=-3x+4$

معادله قائم $\qquad y-4=\frac{1}{3}x\rightarrow y=\frac{1}{3}x+4$

۶۴ ) مشتق بگیرید(محاسبات ساده کردن لازم نیست)

الف ) $y=\sqrt[3]{\cos x}+\tan^{-1}(x^{3}+1)$

ب ) $xy^{2}-2x+x^{2}y=5$

حل الف ) $y' = \dfrac{-\sin x}{۳\sqrt[۳]{\cos^۲ x}} + \dfrac{۳x^۲}{۱+(x^۳+۱)^۲}$

حل ب ) $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y} = -\dfrac{y^۲ - ۲ + ۲xy}{۲xy + x^۲}$

۶۵ ) اگر $f'(x) = ۲x$ باشد مقدار مشتق $y = f(\sin x)$ چقدر است ؟

حل :

$$y' = \cos x . f'\sin x) = \cos x \times ۲\sin x = \sin ۲x$$

از نقطه $A(۱,۰)$ خارج از منحنی $y = x^۲ + ۲x - ۱$ دو مماس بر منحنی رسم شده است طول نقاط برخورد خطوط تماس با منحنی را بدست آورید .

حل :

$$(\alpha, \alpha^۲ + ۲\alpha - ۱) \quad , \quad y' = ۲x + ۲ \rightarrow m = ۲\alpha + ۲$$

$$y - (\alpha^۲ + ۲\alpha - ۱) = (۲\alpha + ۲)(x - \alpha) \xrightarrow{A(۱,۰)} -\alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = ۲\alpha - ۲\alpha^۲ + ۲ - ۲\alpha \rightarrow$$

$$\alpha^۲ - ۲\alpha - ۱ = ۰ \rightarrow \alpha = ۱ \pm \sqrt{۲} \rightarrow (۱ \pm \sqrt{۲}, (۱ \pm \sqrt{۲})^۲ + ۲(۱ \pm \sqrt{۲}) - ۱)$$

۶۶ ) اگر $f(x) = Sin^۲ x$ مطلوب است محاسبه ی $f'(\frac{\pi}{۴})$ .

حل :

$$f'(\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{۴})}{x - \frac{\pi}{۴}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{Sin^۲ x - Sin^۲ \frac{\pi}{۴}}{x - \frac{\pi}{۴}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{Sin(x - \frac{\pi}{۴}) Sin(x + \frac{\pi}{۴})}{x - \frac{\pi}{۴}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} ۱ \times Sin(x + \frac{\pi}{۴}) = ۱$$

۶۷ ) اگر $f(x)=(۲x^{۲}-۱)\sqrt[۳]{x}$ آنگاه مقدار $f'(-۸)$ را حساب کنید .

حل :

$$f(x)=(۲x^{۲}-۱)\sqrt[۳]{x}=۲x^{\frac{۷}{۳}}-x^{\frac{۱}{۳}}\rightarrow f'(x)=\frac{۱۴}{۳}x^{\frac{۴}{۳}}-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(۸)=\frac{۱۴}{۳}\sqrt[۳]{(-۸)^{۴}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(-۸)^{۲}}}=\frac{۱۴\times۱۶}{۳}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۸۹۵}{۱۲}$$

۶۸ ) مشتق پذیری تابع $f$ با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{(x+۲)Sin^{۲}x}$ را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید .

حل: ابتدا پیوستگی را بررسی می کنیم. $\lim\limits_{x\to۰}f(x)=\lim\limits_{x\to۰}\sqrt{(x+۲)Sin^{۲}x}=۰$ تابع در $x=۰$ پیوسته است.

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{(x+۲)}|\sin x|}{x}=$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^{+}}\dfrac{\sin x}{x}(\sqrt{x+۲})=\sqrt{۲}\\ \lim\limits_{x\to۰^{-}}\dfrac{-\sin x}{x}(\sqrt{x+۲})=-\sqrt{۲}\end{cases}\rightarrow f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$$

بنابرای تابع $f$ در $x=۰$ مشتق پذیر نیست .

۶۹ ) برای تابع $f(x)=x^{۴}-۴x^{۲}+۷$

الف) معادله خط مماس بر منحنی تابع را در نقطه ی $x=۱$ واقع برآن بیابید.

ب ) طول نقاطی از تابع که خط مماس برآن نقاط، موازی محور $x$ها باشد را تعیین کنید.

حل الف )

$$A\left|_{y=۱-۴(۱)+۷=۴}^{x=۱}\right|\Rightarrow A\left|_{۴}^{۱}\right. \qquad y'=۴x^{۳}-۸x\rightarrow m=y'_{A}=-۴$$

$$y-y_{۱}=m(x-x_{۱})\rightarrow y-۴=-۴(x-۱)\rightarrow y=-۴x+۸$$

حل ب ) موازی محور $x$ ها $\leftarrow m=۰\leftarrow y'=۰$ .

$$۴x^{۳}-۸x=۰\rightarrow۴x(x^{۲}-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=\pm\sqrt{۲}\end{cases}$$

۷۰ ) مشتق پذیری $y=\sqrt{x^3+x^2}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

اولاً ) $F(0)=\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0 \to$ پیوستگی دارد.

$$y=\sqrt{x^3+x^2}=\sqrt{x^2(x+1)}=|x|\sqrt{x+1}$$

$$F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}\to$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{x+1}=-1$$

$-1\neq 1$ مشتق پذیرنیست .

۷۱ ) اگر خط به معادله $2y=3x+c$ در نقطه $A(a,b)$ بر منحنی به معادله $y=\sqrt{x^2+x-1}$ مماس باشد آنگاه $abc$ کدام است؟

حل:

$$y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}}\quad m=\frac{2a+1}{2\sqrt{a^2+a-1}}=\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad 6\sqrt{a^2+a-1}=4a+2$$

$$\Rightarrow\quad a^2+a-2=0\quad\Rightarrow\begin{cases}a=-2 & \text{غ ق ق}\\ a=1\Rightarrow & (a,b)=(1,b)=\left(1,\dfrac{3+c}{2}\right)=(1,1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3+c}{2}=1\quad\Rightarrow\quad c=-1\qquad b=1\qquad\Rightarrow\quad abc=1\times1\times-1=-1$$

۷۲ ) یک بادکنک کروی را به وسیله یک تلمبه با سرعت $4\pi$ سانتی متر مکعب در ثانیه باد می کنیم. وقتی حجم این بادکنک $36\pi$ سانتی متر مکعب باشد، شعاع بادکنک با چه آهنگی تغییر می کند.

حل :

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3\quad\Rightarrow 36\pi=\frac{4}{3}\pi r^3\Rightarrow r=3$$

$$V_t'=4\pi r^2 r_t'\Rightarrow 4\pi=4\pi\times 9\times r_t'\Rightarrow r_t'=\frac{1}{9}$$

۷۳ ) با استفاده از مشتق نشان دهید تابع با ضابطه $f(x)=\sin^{-۱} x+\cos^{-۱} x$ تـابع ثابـت اسـت. مقـدار آن تابع ثابت را بیابید.

حل: $f$ روی $[-۱,۱]$ پیوسته و مشتق پذیر است و مشتق آن برابر صفر است. پس تابع $f$ یک تابع ثابت است.

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}+\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=۰$$

پس تابع $f$ یک تابع ثابت است.

$$f(۱)=\sin^{-۱}(۱)+\cos^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۲}=۰=\frac{\pi}{۲} \qquad f(x)=\frac{\pi}{۲}$$

۷۴ ) اگر بدانیم تابع $f(x)$ در نقطه ی $x_{۰}=۲$ مشتقی برابر ۵ دارد، آن گاه حاصل عبارت $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲+h)}{۵h}$ را پیدا کنید.

حل . اگر فرض کنیم $۳h=u$، آن گاه $h=\frac{u}{۳}$ و هنگامی که $h\to ۰$ داریم $u\to ۰$ و

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲+h)}{۵h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)-f(۲+h)+f(۲)}{۵h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{۵h}-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۵h}=$$

$$\lim_{u\to ۰}\frac{f(۲+u)-f(۲)}{\frac{۵u}{۳}}-\frac{۱}{۵}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

$$=\frac{۳}{۵}\lim_{u\to ۰}\frac{f(۲+u)-f(۲)}{u}-\frac{۱}{۵}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=$$

$$\frac{۳}{۵}f'(۲)-\frac{۱}{۵}f'(۲)=\frac{۲}{۵}f'(۲)=\frac{۲}{۵}\times ۵=۲$$

۷۵ ) اگر $f(x)=g(۵x^{۲}-۴x)$ و $g'(۱)=۳$، آن گاه مقدار عددی $f'(۱)$ را حساب کنید.

حل :

$$f(x)=g(۵x^{۲}-۴x) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(۱۰x-۴)g'(۵x^{۲}-۴x) \quad\Rightarrow$$

$$f'(۱)=(۱۰-۴)g'(۱)=۶\times ۳=۱۸$$

۷۶ ) معادله‌ی خط مماس و قائم بر نمودار $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+2}$ را در نقطه‌ی x=2 بدست آورید.

$$y'=\frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+2}}\to m=\frac{5}{4},m'=-\frac{4}{5} \qquad x=2\to y=2$$

معادله مماس $y-2=\frac{5}{4}(x-2)\to 4y-5x+2=0$

$y-2=-\frac{4}{5}(x-2)\to 5y+4x-18=0$ معادله قائم

۷۷ ) - اولاً: مشتق y را نسبت به x بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $y=\sqrt[۵]{\cos x}+\tan^{-۱}(x^۲-۱)$

ب) $y=\frac{(۲x+۱)^۵}{x\sqrt{x}}$

ثانیاً: اگر $f'(x)=۲x$ باشد، مشتق $y=f(\sin x)$ را حساب کنید.

حل : الف) $y'=\frac{-\sin x}{۵\sqrt[۵]{\cos^۴ x}}+\frac{۲x}{۱+(x^۲-۱)^۲}$

ب) $y'=\frac{۵\times۲(۲x-۱)^۴\sqrt{x}-(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}x)(۲x+۱)^۵}{(x\sqrt{x})^۲}$

ثانیاً : $y'=f'(\sin x)\times\cos x=۲\sin x\cos x$

۷۸ ) مشتق پذیری تابع زیر را در x=0 بررسی کنید .

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & x<0\\ 4x+1 & x\geq 0\end{cases}$$

حل )

۱) $0\in D_F$ ۳) $f(0)=1=\lim_{x\to 0} f(x)$ $x=1$ پیوسته

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} x^2\ x++1 \\ = \\ \lim_{x\to 0^+} 4x+1=1\end{array}\right\}\text{حد دارد}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x}{x}=4\\ \neq \\ f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x}=1\end{array}\right\}$$

در x=1 مشتق ناپذیر است .

۷۹ ) با استفاده از تعریف مشتق مشتق تابع y=sinx را بدست آورید

حل :

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cosh + \sinh\cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cosh - 1)}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h} = \sin x\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2 h}{h} + \cos x = \cos x$$

۸۰ ) اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ مشتق تابع $y=f(\sin^2 x)$ را به دست آورید.

حل :

$$y' = 2\cos x.\sin x\, f'(\sin^2 x)$$

$$y' = ۲\cos x\,.\sin x\,.-\frac{۱}{\sin^۴ x} = -\frac{۲\cos x}{\sin^۳ x}$$